



TITLE:

# 有限群の作用するホモトピー球面のつくる群について (群作用をもつ多様体のトポロジー)

AUTHOR(S):

阿部, 孝順

---

CITATION:

阿部, 孝順. 有限群の作用するホモトピー球面のつくる群について (群作用をもつ多様体のトポロジー). 数理解析研究所講究録 1974, 203: 29-34

ISSUE DATE:

1974-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105126>

RIGHT:

# 有限群の作用するホモトピー-球面 のつくる群について

京大 数研 阿部 孝 順

## § 1 定義

$G$  を有限群とし  $\alpha : G \longrightarrow O(m)$  を  $G$  の表現とする.

$$\varphi : G \times \Sigma^m \longrightarrow \Sigma^m$$

を  $G$  のホモトピー-球面上の可微分な semi-free な作用とし  
( $\varphi, \Sigma^m$ ) と書くことにする.

( $\varphi, \Sigma^m$ ) が次の条件をみたすとき  $\alpha$ -球面ということにする.

(i)  $\varphi$  の固定点が又ホモトピー-球面  $\Sigma^n$  ( $n \geq 1$ )

(ii)  $\Sigma^n \ni x$  に対して

$$\varphi_x : G \longrightarrow O(T_x \Sigma^n) \quad ; \quad \varphi_x(g) = d\varphi(g)_x$$

が表現として  $\alpha$  と同値である.

$D_m(\alpha)$  :  $\alpha$ -球面の  $G$ -微分同相な類全体の集合

$D_m(\alpha)$  には固定点の回りの連結和を用いて和が定義される.

定義の可能性等については [1] を参照されたい.

$(L, S^m) : (m+1)$ -次元表現  $(\alpha \oplus \text{trivial})$  を  $\mathbb{R}^{m+1}$  の単位球面  $S^m$  に制限して得られる線型な  $\alpha$  球面.

$(L, S^m)$  は  $D_m(\alpha)$  の零元になる.

$$\text{又} \quad \psi : G \times D^m \longrightarrow D^m$$

を  $m$  次元円板  $D^m$  上の可微分な semi-free な作用としたとき、上の  $\alpha$  球面の定義での固定点集合をホモトピー球面とした代わり、 $n$  次元円板  $D^n$  として同様の条件を満たすものを  $\alpha$ -円板ということにする.

$E_m(\alpha) : \alpha$ -円板の  $G$  微分同値な類全体のつくる集合.

$E_m(\alpha)$  も境界連結和により半群をなす.

M. Sebastiani は [2] において固定点の次元が零次元の場合に  $D_m(\alpha)$  が群をなしこの様子を調べている. ここでは、固定点の次元が正の場合に考えてみる.

## §2 $E_m(\alpha)$ の補造

$(\psi, D^m)$  を  $\alpha$ -円板とする. 以下では  $m-n > 2$  を仮定する.

$\text{int } D^n \ni x$ ,  $B_{2\varepsilon}^m$  を  $x$  の回りの  $G$  不変な  $2\varepsilon$ -円板

$T_\varepsilon^m : (D^n - \text{int } B_{2\varepsilon}^m)$  の  $(D^m - \text{int } B_{2\varepsilon}^m)$  における  $\varepsilon$ -管状近傍 ( $G$ -不変なもの)

$$W^m \equiv D^m - \text{int } (B_{2\varepsilon}^m \cup T_\varepsilon^m)$$

$$W_0^{m-1} \equiv \partial B_{2\varepsilon}^m - \text{int } (\partial B_{2\varepsilon}^m \cap T_\varepsilon^m)$$

$$W_1^{m-1} \equiv \partial D^m - \text{int } (\partial D^m \cap T_\varepsilon^m)$$

} free な作用をもつ  $G$ -多様体

$$\bar{W}^m \equiv W^m / G, \quad \bar{W}_0^{m-1} \equiv W_0^{m-1} / G, \quad \bar{W}_1^{m-1} \equiv W_1^{m-1} / G$$

$$\partial W^m = W_0^{m-1} \cup W_1^{m-1} \cup V^{m-1} \quad (V^{m-1} \text{ は } T^m \text{ の 同伴球面バンドル})$$

$$V^{m-1} \cong \partial W_0^{m-1} \times [0, 1] \quad : G\text{-微分同相}$$

なることより  $(\bar{W}^m; \bar{W}_0^{m-1}, \bar{W}_1^{m-1})$  は  $h$  コホモロジー空間となり

$$\tau(\psi) \equiv \tau(\bar{W}^m, \bar{W}_0^{m-1}) \in Wh(G)$$

が定義され、 $\psi$  だけに依っていることが分かる

### 補助定理

$m \geq 6$  ,  $m-n > 2$  なら  $E_m(\alpha)$  は  $Wh(G)$  の元と 1 対 1 に  
対応している。

証明  $(\psi, D^m)$  ,  $(\psi', D^m)$  を  $\alpha$  の内板として  $(\psi, D^m)$  に対  
して  $W^m, W_0^{m-1}, W_1^{m-1}, V^{m-1}$  を上記と同じ記法にし  $(\psi', D^m)$  には  
ダッシュをつけて表わすことにする。

$\tau(\psi) = \tau(\psi')$  とする。  $\bar{V}^{m-1} \cong \bar{V}'^{m-1}$  (微分同相) だから

$S$ -cobordism theorem に依り (uniqueness)

$$\bar{W}^m \cong \bar{W}'^m \quad (\text{微分同相})。$$

$W^m \longrightarrow \bar{W}^m$  ,  $W'^m \longrightarrow \bar{W}'^m$  は普遍被覆なことから

$$W^m \cong W'^m \quad (G\text{-微分同相})。$$

又この  $G$ -微分同相は適当にとると

$$D^m \cong D'^m \quad (G\text{-微分同相})$$

に拡張できる。

又  $\tau \in Wh(G)$  に対して  $S$ -cobordism の存在定理から  $\tau(\eta) = \tau$  なる  $\alpha$  同極  $(\eta, D^m)$  の存在が示される.

註:  $\tau: E_m(\alpha) \longrightarrow Wh(G)$  は定義より準同型であり、従って補助定理により同型対応である.

§3.  $D_m(\alpha)$  について.

$m-n > 2$  とする.

$(\varphi, \Sigma^m)$  を  $\alpha$  球面とし  $\alpha$  を固定点とする.

$B_\varepsilon^m$  を  $\alpha$  の周りの  $G$  不変な  $\varepsilon$  同極とする.  $\varphi \in (\Sigma^m - \text{int } B_\varepsilon^m)$

に制限して  $\alpha$  同極  $(\eta, \Sigma^m - \text{int } B_\varepsilon^m)$  を得る. 但し  $n \geq 5$

$$\tau(\varphi) = \tau(\eta) \in Wh(G)$$

とすると  $\tau(\varphi)$  は  $\varphi$  だけに依り決まる.

定理 1:

$(\varphi, \Sigma^m), (\varphi', \Sigma^m)$  : 二つの  $\alpha$  球面  $n \geq 5$

$\tau(\varphi) = \tau(\varphi')$  ならば  $\varphi$  と  $\varphi'$  は連続な作用として同値

証明  $B_\varepsilon^m$  を上記と同じものとし  $(\varphi', \Sigma^m)$  に対しては  $B_\varepsilon^m$  と書くと可する.  $\tau(\varphi) = \tau(\varphi')$  だから補助定理より

$$f: (\Sigma^m - \text{int } B_\varepsilon^m) \cong (\Sigma^m - \text{int } B_\varepsilon^m) \quad (G\text{-微分同相})$$

$$F: \Sigma^m \longrightarrow \Sigma^m$$

$$\begin{aligned} \Sigma & \quad F|_{\Sigma - \text{int} B_\varepsilon^m} = \text{ト} \\ F(t \cdot v) &= t \cdot f(v) \quad (0 \leq t \leq 1, v \in \partial B_\varepsilon^m) \end{aligned}$$

とすると  $F$  は同相写像で  $G$  の作用を保つ

註:  $Wh(G) = 0$  ならば定理 1 より  $\alpha$  球面は連続的に線型な作用しかないことが分かる.  $G$  Bredon は  $S^1, S^2$  作用に対して同様の事を示している ([1])

## 定理 2

$m - n > 2$ ,  $n \geq 5$  ならば  $D_m(\alpha)$  は群をなす.

証明:  $(\varphi, \Sigma^m)$  を仮定をみたす  $\alpha$  球面とする.

$x$  を固定点として  $B_\varepsilon^m$  を  $x$  の周りの  $G$ -不変な円板とする.

$$W^{m+1} = (\Sigma^m - \text{int} B_\varepsilon^m) \times [0, 1]$$

とすると  $W^{m+1}$  には  $\varphi$  から自然に  $G$  作用が入る. 又角を滑らかにしてこの作用が可微分になると  $\alpha$  円板  $(\psi, W^{m+1})$  ができる.

$\tau(\psi) = \tau(\varphi)$  なことに注意.

補助定理より  $\tau(\psi) = -\tau(\psi)$  なる  $\alpha$  円板  $(\psi, D^{m+1})$  が存在する.

$\tau(\psi \# \psi) = \tau(\psi) + \tau(\psi) = 0$  だから  $\psi \# \psi$  は線型な作用である.

$$\therefore L \cong \partial(\psi \# \psi) \cong \partial\psi \# \partial\psi \cong \varphi \# (-\varphi) \# \partial\psi$$

( $-\varphi$  は  $\varphi$  と逆同変をもつ)

故に  $(-\varphi) \# \partial\psi$  は求める  $\varphi$  の逆元

## 参考文献

- [1] G. Bredon : Introduction to compact transformation groups. Chapt VI.  
; Acad Press. (1972)
- [2] M. Sebastiani : Sur les actions ad deux points de  
groups finits sur les spheres .  
; Comm Math Helv vol 45 (1970)